1164. 道ノ定義ニ就テ

伊藤　清（名大）
東屋五郎

Weyl ハ Die Idee der Riemannschen Fläche

(1923) ニ於テ Bewegung ヲ抽象シテ Weg ヲ定義シテ居リマス。

ソノ際二ツノ運動

$$B_1 : (\varphi_1(t);\ \alpha_1 \leqq t \leqq \beta_1),\quad B_2 : (\varphi_2(t);\ \alpha_2 \leqq t \leqq \beta_2)$$

（以後 $(\varphi_1(t);\ \alpha_1 \leqq t \leqq \beta_1)$ ハ $[\alpha_1, \beta_1]$ ノ点 t ニ $\varphi_1(t)$ ヲ對應サセル寫像ソノモノヲアラハシ，$\{\varphi_1(t);\ \alpha_1 \leqq t \leqq \beta_1\}$ ハソノ Bild タル集合ヲアラハスコトニシマス）ガ *equivalent* デアルトイフノハ，$[\alpha_1, \beta_1]$ カラ $[\alpha_2\ \beta_2]$ ノ上ヘノ一對一単調増加對應ガアッテ $\varphi_2\psi = \varphi_1$ ナルヤウニ出來ルコトデアルトナシ、コレガ *equivalence* ノ三條件ヲ満スノデ，コレニヨリアラユル運動ヲ組分ケシテ，ソノ組ヲ道ト呼ンデ居リマス。コノ定義ニヨリマスト

$B_1 : (\varphi_1(t);\ 0 \leqq t \leqq 1)$ 但シ $\varphi_1(t) = t,\ (0 \leqq t \leqq 1)$

$B_2 : (\varphi_2(t);\ 0 \leqq t \leqq 1)$ 但シ $\varphi_1(t) = \frac{3}{2}t,\ (0 \leqq t \leqq \frac{1}{3})$

〃 $= \frac{1}{2},\ (\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3})$

〃 $= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(t - \frac{2}{3}),$

$(\frac{2}{3} \leqq t \leqq 1)$

ナル B_1, B_2 ハ *equivalent* デナイコトニナリマス。

故ニ長サノアル道ヲ長サヲ *parameter* トシテアラハストイフ常套論法ガ利カナイコトモ起リマス。コノ点ヲ救ハウトイフガ小稿ノ目的デス。

ソレニハ最初ニ掲ゲタ B_1, B_2 ガ *equivalent* トイフコトハ

"$[0\,1]$ カラ $[\alpha_1\beta_1]$, $[\alpha_2\beta_2]$ ノ上ヘノ 單調非減少（必ズシモ一對一ナルヲ要セズ）ナ寫像 ψ_1, ψ_2 ガアッテ, $\varphi_1\psi_1=\varphi_2\psi_2$ トナルヤウニ出來ルコトデアル" ト定義シマス。コノ條件ハ Weyl ノ條件ヨリ弱イワケデス。コレガ $B_1\sim B_1$, $B_1\sim B_2\longrightarrow B_2\sim B_1$ ヲ滿スコトハ明ラカデス。問題ハ移動律デス。B_1, B_2 ハ今迄通リトシ, $B_3:(\varphi_3(t);\ \alpha_3\leqq t\leqq\beta_3)$ トシマス。サテ $B_1\sim B_2$, $B_2\sim B_3$ トシマス。

即チ $[0,1]$ カラ $[\alpha_1\beta_1]$, $[\alpha_2\beta_2]$, $[\alpha_2\beta_2]$, $[\alpha_3\beta_3]$ ノ上ヘ夫々單調非減少對應 ψ_1, ψ_2, ψ_2', ψ_3 ガアッテ, $\varphi_1\psi_1=\varphi_2\psi_2$, $\varphi_2\psi_2'=\varphi_3\psi_3$ トシテオキマス。コノ時 $[0\,1]$ カラ $[\alpha_1\beta_1]$, $[\alpha_3\beta_3]$ ノ上ヘ單調非減少對應 ψ_1', ψ_3' ガアッテ $\varphi_1\psi_1'=\varphi_3\psi_3'$ トナルコトヲ示セバヨイワケデス。

今 $[\alpha_2,\beta_2]$ ヲトリ, ソノ各点ノ ψ_2 ニヨル *Urbild* ヲ考ヘルト, ソレハ一点或ヒハ閉區間デアリマスが, 後者ノ場合ノ起ルヤウナ $[\alpha_2\beta_2]$ 上ノ点ノ集合ヲ $\mathfrak{a}$ トシマス。明ラカニ $\mathfrak{a}$ ハ可附番集合デス。同樣ニ ψ_2' ニ對シテ可附番集合 $\mathfrak{a}'$ ヲ得タトシマス。

$\mathfrak{M}=\mathfrak{a}\cup\mathfrak{a}'$ トシマス。$\mathfrak{M}$ ハ可附番集合デスカラソノ元ニ番号ヲツケテ $\{m_i\}$ トシマス。サテ二次元集合 Λ ヲ次ノ如ク定義シマス。

$$\Lambda = \{(x\, y)\ ;\ \alpha_2 \leqq x \leqq \beta_2,\ x \in \mathfrak{m} \to 0 \leqq y \leqq 1,$$
$$x \notin \mathfrak{m} \to y = 0\}$$

次ニ Λ ニ辞書式ノ順序（*linear order*）ヲツケマス。

シカラバ Λ ハコノ順序デ complete デ，又ソレカラ導カレタ order topology ニ関シテ到ル所稠密ナ可附番集合ガアリマス。（ソレニハ $\mathfrak{m}$ ガ可附番ナルコトガキイテキマス）。故ニ Λ ハ閉區間 $[0, 1]$ ト order-isomorph デス。コノ isomorphism ヲ與ヘル $[0, 1]$ カラ Λ ヘノ寫像ヲ K トシマス。次ニ Λ カラ $[0\ 1]$ ヘノ對應 ϕ ヲ次ノ如クキメマス。

$(x, y) \in \Lambda$ ヲトリ $x \notin \mathfrak{m}$ ナラバ $\psi_2^{-1}(x)$ ハ一点デスカラ $\phi((x, y)) = \psi_2^{-1}(x)$ ト定義シマス．モシ $x \in \mathfrak{m}$ ナラバ $\psi_2^{-1}(x)$ ハ閉區間デスカラ，コレヲ $[\alpha_x, \beta_x]$ トシテ，$\phi((x, y)) = \alpha_x + y(\beta_x - \alpha_x)$ ト定義シマス。然ラバ ϕ ハ order ノ意味デ単調非減少寫像デ $\psi_2 \phi((x\, y)) = x$ デス。

同様ニ ψ_2' ニ對シテ ϕ' ヲ定義シマス。$\psi_2' \phi'((x\, y)) = x$．故ニ $\psi_2 \phi = \psi_2 \phi'$．サテ $\psi_1' = \psi_1 \phi K$，$\psi_3' = \psi_3 \phi' K$ トスレバ，ψ_1, ψ_3 ガ求ムルモノデス．先ヅ ψ_1', ψ_3' ガ夫々 $[0, 1]$ カラ $[\alpha_1, \beta_1]$，$[\alpha_3, \beta_3]$ ヘノ単調非減少ナ寫像ナルコトハ明ラカデス。又

$$\varphi_1 \psi_1' = \varphi_1 \psi_1 \phi K = \varphi_2 \psi_2 \phi K = \varphi_2 \psi_2' \phi' K$$
$$= \varphi_3 \psi_3 \phi' K = \varphi_3 \psi_3'$$

デスカラ，$B_1 \sim B_3$ トナリマス。

備テ道ノ長サヲ，ソレニ属スル運動ノ運動距離ト定義スレバ，ソレハソノ運動ノ選ビ方ニ無関係デ，道ヲ長サヲ parameter トシテアラハスコトノ可能性モ簡単ニ示サレマス。